Устинов Александр Сергеевич, аспирант
Научный руководитель: Ушаков Владимир Николаевич, проф., д-р физ.-мат. наук

ЗАДАЧА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА НА ПЛОСКОСТИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть в евклидовом пространстве R^2 (плоскости) задан объект, представляющий собой односвязное замкнутое ограниченное множество. Обозначим этот объект буквой M. Кроме того, на плоскости также задано целевое множество T и фазовые ограничения C - множество, для которого при любых условиях должно выполняться равенство $M \cap C = \varnothing$. Объект M характеризуется некоторым начальным положением и может перемещаться по плоскости. Пространство R^2 является анизотропным. Для описания анизотропии в условии задачи присутствует диаграмма скоростей: для каждого из направлений указана максимальная скорость движения в этом направлении. Помимо поступательного движения объект может также вращаться со скоростью, зависящей от направления вращения.

Располагая этими данными, необходимо рассчитать траекторию движения объекта таким образом, чтобы он достиг целевого множества ($M \cap T \neq \varnothing$) из начального положения за минимальное время.

Поиск точного решения этой задачи в условиях анизотропии, а также с учётом вращения объекта – задача, представляющая большую сложность. Однако, если решать задачу приближённо, то она становится вполне разрешимой. Переходя к приближённому решению задачи, введём два вида дискретизации, которые позволят нам построить итерационный алгоритм решения задачи:

- дискретизация по времени;
- дискретизация по возможным угловым положениям объекта M.

На первом этапе алгоритма мы сводим задачу перемещения в пространстве объекта M, к задаче перемещения в пространстве центра вращения z этого объекта, используя допущение о том, что объект M имеет конечное число возможных угловых положений. Суть процесса состоит в следующем:

Пусть у нас имеется N возможных угловых положений объекта M. Для каждого из угловых положений мы преобразуем фазовые ограничения C к некоторым другим фазовым ограничением C_i, где $i=1,2,\ldots,N$, таким образом, что требование $M \cap C = \varnothing$ становится эквивалентным требованию $z \cap C_i = \varnothing$, где z – центр вращения объекта M. Другими словами, мы строим «запретные зоны» - области, недоступные для центра вращения объекта M. Целевое множество T для каждого из угловых положений также приводится к виду T_i, а условие завершения поиска $M \cap T \neq \varnothing$ становится эквивалентным условию $z \cap T_i \neq \varnothing$.

Теперь у нас имеется N слоёв, каждый из которых соответствует движению объекта M с определённой фиксированной ориентацией. Каждому слою присущи свои «запретные зоны». Кроме того, каждый слой имеет по два соседних слоя, выбранных так, что все N слоёв организуются в единую кольцеобразную структуру. Повороты объекта M в этой дискретной схеме моделируются переходами движущейся точки из слоя в слой, а движение точки внутри любого из слоёв соответствует движению объекта M, сориентированного одним из N возможных способов.

На втором этапе выполнения алгоритма мы начинаем построение оптимальной траектории движения объекта. Точка, в которой в начальный момент времени находился центр вращения z множества M, принимается за источник волнового фронта. После чего моделируется распространение волнового фронта в нашем слоёном пространстве с течением времени, до тех пор, пока в одном из слоёв волновой фронт не достигнет целевого множества, либо до тех пор, пока общее время перемещения объекта не превысит некоторого разумного предела.

Построение волнового фронта в слое с номером i для момента времени $t_k=k\Delta t$ производится следующим образом: пусть объект M может за время Δt повернуться по часовой стрелке на угол $\varphi_{cw}=l\alpha$, а против часовой стрелки на угол $\varphi_{ccw}=m\alpha$, где l и m – целые числа, а α - минимальный угол, на который можно повернуть объект M. Тогда на формирование волнового фронта в i-м слое будут влиять ещё l+m волновых фронтов из соседних слоёв.

$$L_i^{k+1} = W_i^{k+1} \cup \Big[\Big(\Big(\Big(\big(W_{i+m}^{k+1} \setminus C_{i+m-1}\big) \cup W_{i+m-1}^{k+1}\Big) \setminus C_{i+m-2}\Big) \cup \ldots \cup W_{i+1}^{k+1}\Big) \cup \\ \Big(\Big(\Big(\big(W_{i-l}^{k+1} \setminus C_{i-l+1}\big) \cup W_{i-l+1}^{k+1}\Big) \setminus C_{i-l+2}\Big) \cup \ldots \cup W_{i-1}^{k+1}\Big)\Big] \setminus C_i,$$

где Ci – фазовые ограничения в слое i,

Wik+1 –волновой фронт в слое i на следующем шаге итерации в отсутствие каких - либо влияющих факторов.

Lik+1 – окончательный волновой фронт в слое i на следующем шаге итерации с учётом всех влияющих факторов.

Третий и последний этап алгоритма предназначен для восстановления оптимальной траектории движения по множеству волновых фронтов, являющемуся результатом работы этапа 2. Процесс восстановления траектории начинается в точке касания волнового фронта и целевого множества и производится «в обратном времени». На первом шаге точка касания становится текущей и добавляется к маршруту. После этого начинается итерационный процесс построения маршрута. Предположим, что текущая точка принадлежит волновому фронту, который соответствует некоторому моменту времени t_k. Тогда в качестве точки, которая будет добавлена к маршруту на данном шаге итерационного процесса, будет выбрана точка, принадлежащая волновому фронту для предыдущего момента времени t_{k-1} и расположенная ближе всего к текущей, точке. После чего эта вновь выбранная точка становится текущей и процесс повторяется. Мы продолжаем добавлять новые точки к маршруту до тех пор, пока не добавим к нему точку z_0 – исходное положение центра вращения объекта M.